

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **ZAVRŠNI RAD**

**Frano Knezović**

Zagreb, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Antun Galović, dipl. ing.

Student:

Frano Knezović

Zagreb, 2018.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Srdačno se zahvaljujem mentoru prof. dr. sc. Antunu Galoviću na strpljenju i velikodušnosti, na svim stručnim savjetima, potpori koju mi je iskazao tijekom izrade ovoga rada te na pruženom znanju na području termodinamike.

Uz to, želim se zahvaliti i asistentu Alenu Cukrovu, mag. ing. mech. na utrošenom vremenu i iznimnoj pomoći tijekom provedbe numeričke analize u ovome radu.

Frano Knezović



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Frano Knezović**

Mat. br.:0035197843

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Zagrijavanje vode horizontalno odnosno vertikalno uronjenim grijačem**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Water heating using vertically or horizontally immersed heater**

Opis zadatka:

U radu je potrebno prikazati način zagrijavanja zadane mase vode s horizontalno odnosno vertikalno uronjenim cilindričnim električnim grijačem. Za svaki tip uronjenosti grijača razrađena su dva načina zagrijavanja i to konstantnom površinskom temperaturom grijača odnosno konstantnim toplinskim učinkom grijača. Masa zagrijavane vode neka iznosi 5 kg, početne temperature 20 °C, a konačna 80 °C. Promjer grijača 15 mm a duljina 300 mm. U slučaju konstantne površinske temperature ista iznosi 90 °C, a u slučaju konstantnog toplinskog učina grijača, isti iznosi 500 W.

Za konstantnu površinsku temperaturom potrebno je prikazati:

- a1) vremensku promjenu trenutnog koeficijenta konvektivnog prijenosa topline;
- a2) vremensku promjenu temperature vode;
- a3) iznos trenutnog toplinskog toka;
- a4) prosječnu vrijednost toplinskog toka te ukupno vrijeme zagrijavanja vode na zadanu konačnu temperaturu. To ukupno vrijeme usporediti s vrijednosti iz a2).

Za slučaj zadanog konstantnog toplinskog učinka potrebno je:

- b1) prikazati vremensku promjenu koeficijenta konvektivnog prijenosa topline;
- b2) prikazati vremensku promjenu površinske temperature grijača;
- b3) prikazati vremensku promjenu temperature vode;
- b4) izračunati vrijeme zagrijavanja vode na zadanu konačnu temperaturu i tu vrijednost usporediti s vrijednosti dobivenom pod b3).

Dobivene vrijednosti a1) – a4) i b1) – b4) kritički proanalizirati i fizikalno opravdati.

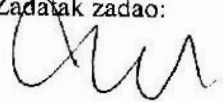
U radu navesti korištenu literaturu i eventualnu pomoć mentora!

Zadatak zadan:  
30. studenog 2017.

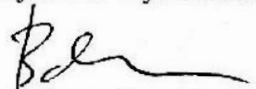
Rok predaje rada:  
1. rok: 23. veljače 2018.  
2. rok (izvanredni): 28. lipnja 2018.  
3. rok: 21. rujna 2018.

Predviđeni datumi obrane:  
1. rok: 26.2. - 2.3. 2018.  
2. rok (izvanredni): 2.7. 2018.  
3. rok: 24.9. - 28.9. 2018.

Zadatak zadao:

  
Prof. dr. sc. Antun Galović

Predsjednik Povjerenstva:

  
Prof. dr. sc. Igor Balen

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	II
POPIS TABLICA.....	III
SAŽETAK.....	VI
SUMMARY .....	VII
1. UVOD.....	1
2. TERMODINAMIČKE OSNOVE .....	2
2.1. Izmjena topline.....	2
2.2. Formulacija matematičkog modela .....	3
2.2.1. Horizontalni grijač .....	4
2.2.2. Vertikalni grijač .....	5
2.3. Problem u slučaju proračuna s nametnutim konstantnim toplinskim tokom .....	7
3. TERMODINAMIČKI PRORAČUN .....	8
3.1. Horizontalni grijač s konstantnom površinskom temperaturom .....	9
3.2. Vertikalni grijač s konstantnom površinskom temperaturom .....	13
3.3. Horizontalni grijač s konstantnim toplinskim učinkom .....	16
3.4. Vertikalni grijač s konstantnim toplinskim učinkom .....	19
4. NUMERIČKA ANALIZA .....	22
5. ANALIZA, PRIMJENA I USPOREDBA GRIJAČA .....	27
6. ZAKLJUČAK.....	30
LITERATURA.....	31
PRILOZI.....	32

## POPIS SLIKA

Slika 1.	Prirodni konvekcijski tok preko horizontalnog vrućeg cilindra .....	4
Slika 2.	prirodna konvekcija na vertikalnoj stijenci .....	6
Slika 3.	Vremenska promjena temperature vode, koeficijenta konvektivnog prijenosa topline te toplinskog toka kod horizontalnog grijača sa zadanim konstantnom površinskom temperaturom grijača .....	11
Slika 4.	Vremenska promjena temperature vode, koeficijenta konvektivnog prijenosa topline te toplinskog toka kod vertikalnog grijača sa zadanim konstantnom površinskom temperaturom grijača .....	14
Slika 5.	Vremenska promjena temperature vode, koeficijenta konvektivnog prijenosa topline te temperature stijenske kod horizontalnog grijača sa zadanim konstantnim toplinskim tokom.....	17
Slika 6.	Vremenska promjena temperature vode, koeficijenta konvektivnog prijenosa topline te temperature stijenske kod vertikalnog grijača sa zadanim konstantnim toplinskim tokom.....	20
Slika 7.	Mreža konačnih volumena .....	22
Slika 8.	Rubni uvjeti .....	23
Slika 9.	Podrelaksacijski faktori .....	23
Slika 10.	Dijagram vrijednosti reziduala .....	24
Slika 11.	Slikoviti prikaz zagrijavanja vode .....	25
Slika 12.	Usporedba numerički dobivenih rezultata s analitičkim .....	27
Slika 13.	Vremenska ovisnost temperature vode za grijače s konstantnom površinskom temperaturom.....	27
Slika 14.	Promjena temperature vode primjenom grijača snage 250 W .....	27
Slika 15.	Vertikalni i horizontalni bojler .....	27

**POPIS TABLICA**

Tablica 1. Zadane vrijednosti .....	8
Tablica 2. Rezultati proračuna (3.1.) .....	10
Tablica 3. Rezultati proračuna (3.2.) .....	13
Tablica 4. Rezultati proračuna (3.3.) .....	16
Tablica 5. Rezultati proračuna (3.4.) .....	19

**POPIS OZNAKA****Latinične oznake**

Oznaka	Mjerna jedinica	Opis
$A$	$m^2$	površina
$A_{gr}$	$m^2$	površina grijača
$c_w$	$J/(kgK)$	specifični toplinski kapacitet vode
$d$	-	oznaka potpunog diferencijala
$d$	$m$	promjer grijača
$L$	$m$	duljina grijača
$m_w$	$kg$	masa vode
$Q$	$J$	toplina
$Q_{gr}$	$J$	toplina dovedena s grijača
$t$	$s$	vrijeme
$t_z$	$s$	vrijeme zagrijavanja
$t_{z, \vartheta_s}^h$	$s$	vrijeme zagrijavanja primjenom horizontalnog grijača s konstantnom površinskom temperaturom
$t_{z, \vartheta_s}^v$	$s$	vrijeme zagrijavanja primjenom vertikalnog grijača s konstantnom površinskom temperaturom
$t_{z, \phi_{gr}}^h$	$s$	vrijeme zagrijavanja primjenom horizontalnog grijača s konstantnim toplinskim učinkom
$t_{z, \phi_{gr}}^v$	$s$	vrijeme zagrijavanja primjenom vertikalnog grijača s konstantnim toplinskim učinkom

**Grčke oznake**

Oznaka	Mjerna jedinica	Opis
$\alpha$	$W/(m^2K)$	koeficijent prijelaza topline
$\alpha_w$	$W/(m^2K)$	koeficijent prijelaza topline na strani vode
$\beta_w$	$K^{-1}$	toplinska širljivost vode
$\Delta$	-	razlika (diferencija)
$\delta$	-	oznaka nepotpunog diferencijala
$\delta_H$	$m$	debljina hidrodinamičkog sloja
$\delta_T$	$m$	debljina temperaturnog graničnog sloja
$\varepsilon$	$^{\circ}C$	razlika između proračunate i pretpostavljene temperature
$\eta_w$	$kg/(m\ s)$	dinamička žilavost (viskoznost)



$\vartheta$	°C	temperatura
$\vartheta_{\infty}$	°C	temperatura okolišnog fluida
$\vartheta_m$	°C	srednja temperatura vode
$\vartheta_s$	°C	temperatura stijenke
$\vartheta_w$	°C	temperatura vode
$\vartheta_{w,poč}$	°C	početna temperatura vode
$\vartheta_{w,kon}$	°C	konačna temperatura vode
$\lambda_w$	W/(m K)	toplinska provodnost vode
$\rho_w$	kg/m <sup>3</sup>	gustoća vode
$\Phi$	W	toplinski tok
$\Phi_{gr}$	W	toplinski učin grijača
$\Phi_{pr, \vartheta_s}^h$	W	prosječna vrijednost toplinskog toka za ukupno vrijeme zagrijavanja horizontalnim grijačem s konstantnom površinskom temperaturom
$\Phi_{pr, \vartheta_s}^v$	W	prosječna vrijednost toplinskog toka za ukupno vrijeme zagrijavanja vertikalnim grijačem s konstantnom površinskom temperaturom

### **Bezdimenzijske značajke**

Oznaka	Mjerna jedinica	Opis
$Nu = \frac{\alpha l_0}{\lambda}$	-	Nusseltova značajka
$Gr = \frac{g\beta(\vartheta_s - \vartheta_w)l_0^3}{\nu^3}$	-	Grashofova značajka
$Pr = \frac{\eta c_p}{\lambda}$	-	Prandtlova značajka
$Ra = GrPr$	-	Rayleighova značajka

## SAŽETAK

U ovome radu primijenjen je analitički pristup za termodinamički proračun za slučaj zagrijavanja vode zadane mase te početne i konačne temperature. U tu svrhu korišten je program za tablično računanje – *Excel*. Na koncu je provedena i numerička analiza horizontalnog grijača s konstantnom površinskom temperaturom pomoću softverskog paketa *FLUENT* te su prikazana rješenja i za taj slučaj.

Cilj je dobiti profil temperature vode tijekom zagrijavanja kao i vremensku promjenu trenutnog koeficijenta konvektivnog prijenosa topline te iznos trenutnog toplinskog toka. Također, želi se usporediti vrijednosti dobivene numeričkim i analitičkim putem kako bi se utvrdilo mogu li se analitičkim pristupom s kvazistacionarnim modelom dovoljno točno odrediti rješenja za ovaj slučaj.

U analitičkom pristupu korištene su osnovne jednadžbe iz prijenosa topline te Churchilllove korelacijske funkcije za računanje koeficijenta prijenosa topline. Numeričkom analizom rješavan je sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi kojim se može opisati prirodna konvekcija u vodi.

Ključne riječi: zagrijavanje vode, grijač, cilindar, prijenos topline, slobodna konvekcija

## SUMMARY

In this paper, an analytical approach to the thermodynamic calculation was used for the heating water of the given mass and the initial and final temperature. For this purpose was used Excel spreadsheet. Finally, a numerical analysis of the horizontal heater with constant surface temperature was carried out using the FLUENT software package and the solutions and the case were also presented.

The aim is to obtain the water temperature profile during the heating as well as the time change of the current convective heat transfer coefficient and the amount of current heat flow. It also seeks to compare numerically and analytically obtained values to ascertain whether an analytical approach to a quasi-model model can adequately determine the solutions to this case.

In the analytical approach the basic heat transfer equations were used and Churchill correlation functions to calculate heat transfer coefficients. Numerical analysis solved the system of partial differential equations describing natural convection in water.

Key words: water heating, heater. cylinder, heat transfer, natural convection

## 1. UVOD

Konvektivni prijenos topline vezan je za pojave strujanja tekućine. Prijenos topline slobodnom (prirodnom) konvekcijom odvija se onda kada je strujanje tekućine uvjetovano samo razlikom u gustoći čestica tekućine. Razlike u gustoćama čestica tekućine najvećim su dijelom posljedica njihove temperaturne razlike.

Prirodna konvekcija s horizontalnog i vertikalnog cilindra ispitivana je u prošlosti, a ispituje se i danas. Prijenos topline prirodnom konvekcijom s horizontalnog cilindra ima različite primjene, od grijača vode, izmjenjivača topline, do solarnog grijanja i hlađenja elektroničkih paketa. [1]

Tijekom analitičkog proračuna za slučaj konstantne površinske temperature grijača i slučaj grijača s konstantnim toplinskim tokom korišten je sličan pristup. Pomoću izračunatih fizikalnih svojstava vode mogu se dobiti i odgovarajuće bezdimenzijske značajke, a s tim se podacima može dobiti povećanje temperature vode u odabranom vremenskom koraku kao i iznos trenutnog toplinskog toka te vrijednost koeficijenta prijelaza topline.

U numeričkoj analizi problem je bio kompliciraniji. Potrebno je prvo napraviti geometriju samog modela te mrežu konačnih volumena te s time ući u numerički rješavač. Ovdje je ispitan samo horizontalni grijač s konstantnom površinskom temperaturom jer je, kako će se vidjeti, on zadovoljio zadani proces zagrijavanja vode do konačne temperature. Također, zadovoljio je i vertikalni grijač s konstantnom površinskom temperaturom, no zbog kompliciranosti takvog modela te ograničenosti rada procesora, ovaj slučaj nije numerički analiziran u ovome radu.

## 2. TERMODINAMIČKE OSNOVE

### 2.1. Izmjena topline

Toplina se prenosi (širi) trima osnovnim načinima:

- a) provođenjem (kondukcijom) kroz krutine, kapljevine i plinove
- b) konvekcijom (komešanjem) kapljevutih i plinovutih čestica
- c) zračenjem (radijacijom), koje se odvija bez materijalnog posrednika.

Prijenos topline konvekcijom, pored intermolekularnog, odvija se dodatno komešanjem različito temperiranih čestica tekućine. Takve su čestice doduše malene, ali u usporedbi s molekulama još uvijek su velike. Zbog uskomešanosti, različito temperirane čestice na svojim putanjama (trajektorijama), a koje ovise o načinu strujanja, dolaze u međusobni dodir predavši pri tome određeni kvantum topline pa prijenos topline konvekcijom, dakle, dodatno počiva na mnoštvu izravnih dodira čestica tekućine različitih temperatura. Stoga je konvektivni prijenos topline vezan za pojave strujanja tekućine.

Ako je strujanje tekućine potaknuto umjetno, nametnutom razlikom tlakova (ventilator, pumpa, vjetar, ...), govori se o prijenosu topline prinudnom ili prisilnom konvekcijom. Ako je strujanje tekućine uvjetovano samo razlikom u gustoći čestica tekućine (uzgon), tada se govori o prijenosu topline slobodnom ili prisilnom konvekcijom. Razlike u gustoćama čestica tekućine najvećim su dijelom posljedica njihove temperaturne razlike.

Vrlo važni način prijenosa topline u tehnici je predaja topline od tekućine u gibanju na neku krutu stijenu i obrnuto. Praktički način proračuna bazira se na Newtonovu iskustvenom stavku, koji se u literaturi spominje kao Newtonov zakon hlađenja:

$$\delta\Phi = \alpha(\vartheta_s - \vartheta_\infty)dA \quad (1)$$

pri čemu  $\delta\Phi$  znači diferencijalnu vrijednost toplinskog toka,  $W$ , koji se konvekcijom izmijeni s elementa vanjske krute površine  $dA$ , temperature  $\vartheta_s$ , s okolišnim fluidom temperature  $\vartheta_\infty$ . Pri tome razlika temperatura  $\vartheta_s - \vartheta_\infty$  označuje temperaturni pad u graničnom sloju fluida koji se formira neposredno uz krutu stijenu. Koeficijent proporcionalnosti  $\alpha$  u jednadžbi (1) definira se kao lokalni koeficijent prijelaza topline, a izražava se u  $W/(m^2K)$ . [2]

## 2.2. Formulacija matematičkog modela

Zagrijavanje vode pripada skupini tipičnih nestacionarnih procesa, budući da se temperatura vode povećava s vremenskom varijablom. U okviru ovoga rada koristi se analitička metoda s kvazistacionarnim modelom.

U analitičkom pristupu prijelaz topline s grijača na vodu modeliran je pomoću koeficijenta prijelaza topline. Toplina  $Q$ , koju u vremenskom intervalu  $\Delta t$  uronjeni grijač preda vodi, računa se prema jednadžbi

$$Q = \Phi_{gr} \Delta t = \alpha d \pi L (\vartheta_s - \vartheta_w) \Delta t = m_w c_w \Delta \vartheta_w. \quad (2)$$

Kako se pri zagrijavanju vode radi o prirodnoj konvekciji, moramo naše jednadžbe prilagoditi tom modelu. Tako će za svaki tip grijača, uz određeni način zagrijavanja, biti važna fizikalna svojstva vode. Ta svojstva su u funkciji temperature te su opisana sljedećim jednadžbama:

$$\rho_w(\vartheta) = 1000,844264 - 0,07091626 \cdot \vartheta - 0,003680371591 \cdot \vartheta^2, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \beta_w(\vartheta) = & -5,3359889 \cdot 10^{-5} + 1,522899537 \cdot 10^{-5} \cdot \vartheta \\ & -1,285025336 \cdot 10^{-7} \cdot \vartheta^2 + 5,793796383 \cdot 10^{-10} \cdot \vartheta^3, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \lambda_w(\vartheta) = & 0,5593847001 + 0,002168741815 \cdot \vartheta \\ & -9,791336261 \cdot 10^{-6} \cdot \vartheta^2, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \eta_w(\vartheta) = & 0,001731202336 - 4,608068794 \cdot 10^{-5} \cdot \vartheta \\ & +5,799206954 \cdot 10^{-7} \cdot \vartheta^2 - 2,713558598 \cdot 10^{-9} \cdot \vartheta^3, \end{aligned} \quad (6)$$

$$c_w(\vartheta) = 4207,07135 - 1,289804126 \cdot \vartheta + 0,01429382011 \cdot \vartheta^2. \quad (7)$$

Zbog matematičke složenosti pri rješavanju jednadžbi konvektivnog prijenosa topline, razvio se zakon sličnosti na kojem se zasnivaju metode za generalizaciju eksperimentalnih rezultata i metode za predviđanje toka prototipne pojave na temelju dobivenih rezultata ispitivanja na modelu. Tako su nastale kriterijske veličine koje su relevantne za rješavanje problema konvektivnog prijenosa topline između krute stijene temperature  $\vartheta_s$  i tekućine temperature  $\vartheta_\infty$ . To su zapravo bezdimenzijski brojevi formirani iz različitih fizikalnih veličina. Za ovaj zadatak važni su Nusseltov broj, Rayleighov broj te Grashofov i Prandtllov broj.

Nusseltov broj se označuje kao

$$Nu = \frac{\alpha l_0}{\lambda} \quad (8)$$

i karakterizira omjer karakteristične duljine  $l_0$  i debljine sloja  $\lambda/\alpha$  ili se može shvatiti kao omjer stvarne gustoće toplinskog toka koji je određen koeficijentom prijelaza topline  $\alpha$  i gustoće toplinskog toka čistim provođenjem kroz sloj debljine  $l_0$ . On zapravo karakterizira proces konvektivnog prijenosa topline na relaciji tekućina – kruta stijenka. On je obično nepoznat u problemima konvekcije jer u sebe uključuje koeficijent konvektivnog prijenosa topline  $\alpha$ , kojeg se obično treba odrediti. Veličina  $l_0$  predstavlja karakterističnu duljinu, a u našem slučaju to je promjer cijevi grijača  $d$ . Toplinska provodnost tekućine označena je s  $\lambda$ .

Grashofov broj predstavlja omjer uzgonske sile i sile trenja, a definira se kao

$$Gr = \frac{g\beta(\vartheta_s - \vartheta_w)l_0^3}{\nu^3}. \quad (9)$$

Na taj način Grashofov broj pri slobodnoj konvekciji za promatranu tekućinu označuje profil brzina. Ovdje  $\beta$  označava toplinsku širljivost vode,  $K^{-1}$ , a omjer dinamičke viskoznosti  $\eta$  i gustoće tekućine  $\rho$  predstavlja kinematičku žilavost (viskozitet) tekućine  $\nu$ .

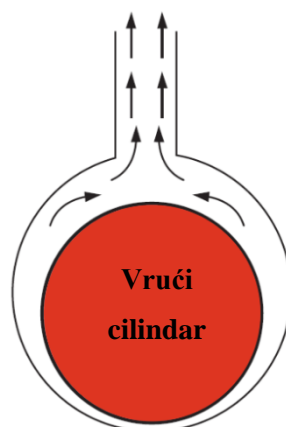
Prandtllov broj komponiran je samo od fizikalnih svojstava tekućine. Fizikalno predstavlja omjer difuzije impulsa i toplinske difuzije, a uvođenjem  $a = \lambda/(\rho c_p)$  definira se kao

$$Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\eta c_p}{\lambda}. \quad (10)$$

Umnožak Grashofovog i Prandtlvog broja definira se kao Rayleighova značajka.

### 2.2.1. Horizontalni grijač

Granični sloj na vrućem horizontalnom cilindru počinje se razvijati na dnu, povećavajući debljinu duž opsega, a zagrijana tekućina struji prema gore kako je to prikazano na slici ispod.



Slika 1. Prirodni konvekcijski tok preko horizontalnog vrućeg cilindra

Lokalni Nusseltov broj je najveći na dnu, a najmanji na vrhu cilindra u slučaju laminarnog graničnog sloja. Churchill i Chu su povezali već postojeće eksperimentalne podatke za prosječan Nusseltov broj kod slobodne konvekcije na izotermnom horizontalnom cilindru u jednadžbu:

$$Nu = \left[ 0,60 + \frac{0,387Ra^{1/6}}{\left( 1 + \left( \frac{0,559}{Pr} \right)^{9/16} \right)^{8/27}} \right]^2. \quad (11)$$

Jednadžba (11) bit će iskorištena za određivanje koeficijenta konvektivnog prijenosa topline za model slobodne konvekcije oko horizontalne stijenke cijevi s konstantnom površinskom temperaturom.

Za slučaj horizontalno uronjenog grijača s nametnutim konstantnim toplinskim tokom koeficijent konvektivnog prijenosa topline se računa prema jednadžbi

$$Nu = 0,36 + \frac{0,518Ra^{1/4}}{\left( 1 + \left( \frac{0,559}{Pr} \right)^{9/16} \right)^{4/9}}. \quad (12)$$

U gornjim jednadžbama veličina  $Ra$  predstavlja Rayleighovu značajku koju se računa prema izrazu

$$Ra = GrPr = \frac{g\beta_w(\vartheta_s - \vartheta_w)d^3}{\nu_w^2} \cdot \frac{\eta_w c_w}{\lambda_w}. \quad (13)$$

Jednadžbe (11) i (12) valjane su uz zadovoljenje kriterija  $10^6 < Ra < 10^9$ .

Fizikalna svojstva vode koja se javljaju u gornjim relacijama dobivaju se iz jednadžbi (3) – (7) te se moraju uzeti za srednju temperaturu vode  $\vartheta_m = (\vartheta_w + \vartheta_s)/2$ . [3]

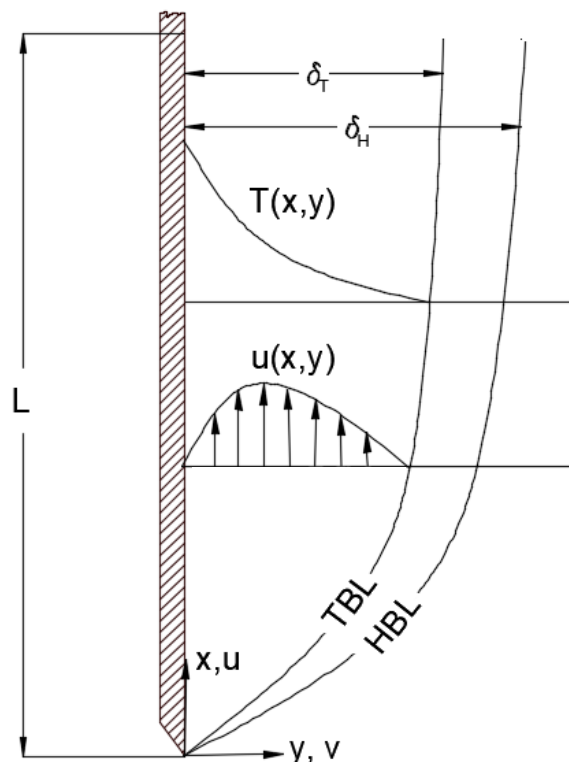
### 2.2.2. Vertikalni grijač

Između proračuna koeficijenta prijelaza topline kod ravne uspravne stijenke i kod vertikalnog uspravnog cilindra postoji određena veza. Gebhart je pokazao da se relacija za vertikalnu ploču može primijeniti i za vertikalni cilindar uz uvjet:

$$\frac{D}{L} > \frac{35}{Gr^{1/4}}.$$



Na sljedećoj slici prikazana je prirodna konvekcija na vertikalnoj površini koja je toplija od tekućine koja je okružuje.



Slika 2. Prirodna konvekcija na vertikalnoj stijenci

Zbog viskoznosti tekućine i utjecaja stijenke počinje se formirati hidrodinamički granični sloj (HBL - *Hydrodynamic Boundary Layer*) čija je debljina označena s  $\delta_H$ . Što se ide dalje prema vrhu u smjeru osi  $x$ , to se stvara sve deblji i deblji hidrodinamički granični sloj. Shodno tome se i profil brzina mijenja uzduž stijenke.

Pored hidrodinamičkog graničnog sloja formira se i duž stijenke, dakako ovisno od lokacije grijanja, i temperaturni granični sloj (TBL - *Thermal Boundary Layer*), koji također prolazi područje razvijanja do potpune razvijenosti. Debljina tog sloja označena je s  $\delta_T$ .

Za model slobodne konvekcije oko vertikalno uronjene cijevne stijenke s konstantnom površinskom temperaturom računat će se koeficijent prijelaza topline pomoću jednadžbe

$$Nu = \left[ 0,825 + \frac{0,387Ra^{1/6}}{\left(1 + \left(\frac{0,437}{Pr}\right)^{9/16}\right)^{8/27}} \right]^2. \quad (14)$$

Nadalje, za slobodnu konvekciju s nametnutim konstantnim toplinskim tokom koristit će se jednačba

$$Nu = \left[ 0,825 + \frac{0,387Ra^{1/6}}{\left(1 + \left(\frac{0,492}{Pr}\right)^{9/16}\right)^{8/27}} \right]^2. \quad (15)$$

I u ovom slučaju se pojavljuje Rayleighova značajka, no sada se za karakterističnu duljinu uzima duljina grijača  $L$ :

$$Ra = GrPr = \frac{g\beta_w(\vartheta_s - \vartheta_w)L^3}{\nu_w^2} \cdot \frac{\eta_w c_w}{\lambda_w}. \quad (16)$$

Jednačbe (14) i (15) valjane su uz zadovoljenje kriterija  $10^{-1} < Ra < 10^{12}$ , a fizikalna svojstva vode koja se javljaju u gornjim relacijama dobivaju se iz jednačbi (3) – (7) te se moraju uzeti za srednju temperaturu vode  $\vartheta_m = (\vartheta_w + \vartheta_s)/2$ .

### 2.3. Problem u slučaju proračuna s nametnutim konstantnim toplinskim tokom

Prilikom proračuna kod horizontalnog i vertikalnog grijača sa zadanim toplinskim tokom javlja se problem zbog nepoznate početne temperature stijenke. Kada je umjesto temperature stijenke  $\vartheta_s$  propisan konstantan toplinski tok  $\Phi_{gr}$ , nepoznata je temperaturna razlika  $\vartheta_s - \vartheta_w$  pri postavljanju problema. Uz zadanu početnu temperaturu vode  $\vartheta_w = 20\text{ }^\circ\text{C}$  potrebno je uvesti početnu pretpostavku za temperaturu stijenke. Prihvaćenja početna temperatura stijenke uzeta je onda kada je razlika između proračunate i pretpostavljene vrijednosti iznosila  $\varepsilon \leq 0,1\text{ }^\circ\text{C}$ .

### 3. TERMODINAMIČKI PRORAČUN

#### Postupak provođenja proračuna

Sljedeća tablica prikazuje vrijednosti koje su zadane u zadatku:

**Tablica 1. Zadane vrijednosti**

Veličina	Oznaka	Iznos	Mjerna jedinica
Masa zagrijavane vode	$m_w$	5	kg
Početna temperatura vode	$\vartheta_{w,poc}$	20	°C
Konačna temperatura vode	$\vartheta_{w,kon}$	80	°C
Promjer grijača	$d$	15	mm
Duljina grijača	$L$	300	mm
Površinska temperatura grijača	$\vartheta_s$	90	°C
Toplinski učin grijača	$\Phi_{gr}$	500	W

U slučaju grijača konstantne površinske temperature proračun je proveden na sljedeći način:

- 1) Izračunati fizikalna svojstva vode za odgovarajuću temperaturu:  $\rho_w(\vartheta), \beta_w(\vartheta), \lambda_w(\vartheta), \eta_w(\vartheta), c_w(\vartheta)$
- 2) Izračunati bezdimenzijske značajke:  $Pr, Gr, Ra, Nu$
- 3) Iskazati vrijednost koeficijenta prijelaza topline  $\alpha$
- 4) Odrediti povećanje temperature vode  $\Delta\vartheta_w$  u promatranom vremenskom inkrementu
- 5) Izračunati vrijednost trenutnog toplinskog toka  $\Phi$ .

Na sličan način proveden je i proračun uz grijač s nametnutim konstantnim toplinskim tokom:

- 1) Pretpostaviti temperaturu stijenke grijača
- 2) Izračunati fizikalna svojstva vode za odgovarajuću temperaturu:  $\rho_w(\vartheta), \beta_w(\vartheta), \lambda_w(\vartheta), \eta_w(\vartheta), c_w(\vartheta)$
- 3) Izračunati bezdimenzijske značajke:  $Pr, Gr, Ra, Nu$
- 4) Iskazati vrijednost koeficijenta prijelaza topline  $\alpha$
- 5) Izračunati temperaturu stijenke
- 6) Odrediti povećanje temperature vode  $\Delta\vartheta_w$  u promatranom vremenskom inkrementu.

### 3.1. Horizontalni grijač s konstantnom površinskom temperaturom

Kako je navedeno u postupku provođenja proračuna, uz zadanu početnu temperaturu vode  $\vartheta_{w,poc} = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$  daju se izračunati fizikalna svojstva vode za tu temperaturu. Također, uz poznata fizikalna svojstva mogu se izračunati i bezdimenzijske značajke. Nakon toga se izračunava koeficijent prijelaza topline iz jednadžbe (8):

$$\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda}{d}. \quad (17)$$

Uz tako poznate veličine možemo izračunati trenutni toplinski tok prema jednadžbi (2):

$$\Phi = \alpha d \pi L (\vartheta_s - \vartheta_w). \quad (18)$$

Povećanje temperature vode u promatranom vremenskom inkrementu također se izražava pomoću jednadžbe (2):

$$\Delta \vartheta_w = \frac{\alpha d \pi L (\vartheta_s - \vartheta_w)}{m_w c_w}. \quad (19)$$

Važno je napomenuti da se vremenski inkrement  $\Delta t$  uzima dovoljno malim jer se problem zagrijavanja vode promatra kao kvazistacionarni. U ovom modelu uzet je inkrement  $\Delta t = 1\text{ s}$  te se tako jednadžbe potrebne za provođenja ovoga proračuna mogu smatrati dovoljno valjanima.

U provedenom algoritmu uziman je vremenski inkrement  $\Delta t = 1\text{ s}$  pa je za sljedeći vremenski inkrement,  $k+1$ , temperatura vode jednaka

$$\vartheta_w^{k+1} = \vartheta_w^k + \Delta \vartheta_w \quad (20)$$

i proces je vođen do trenutka dok voda nije postigla traženu temperaturu od  $80\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

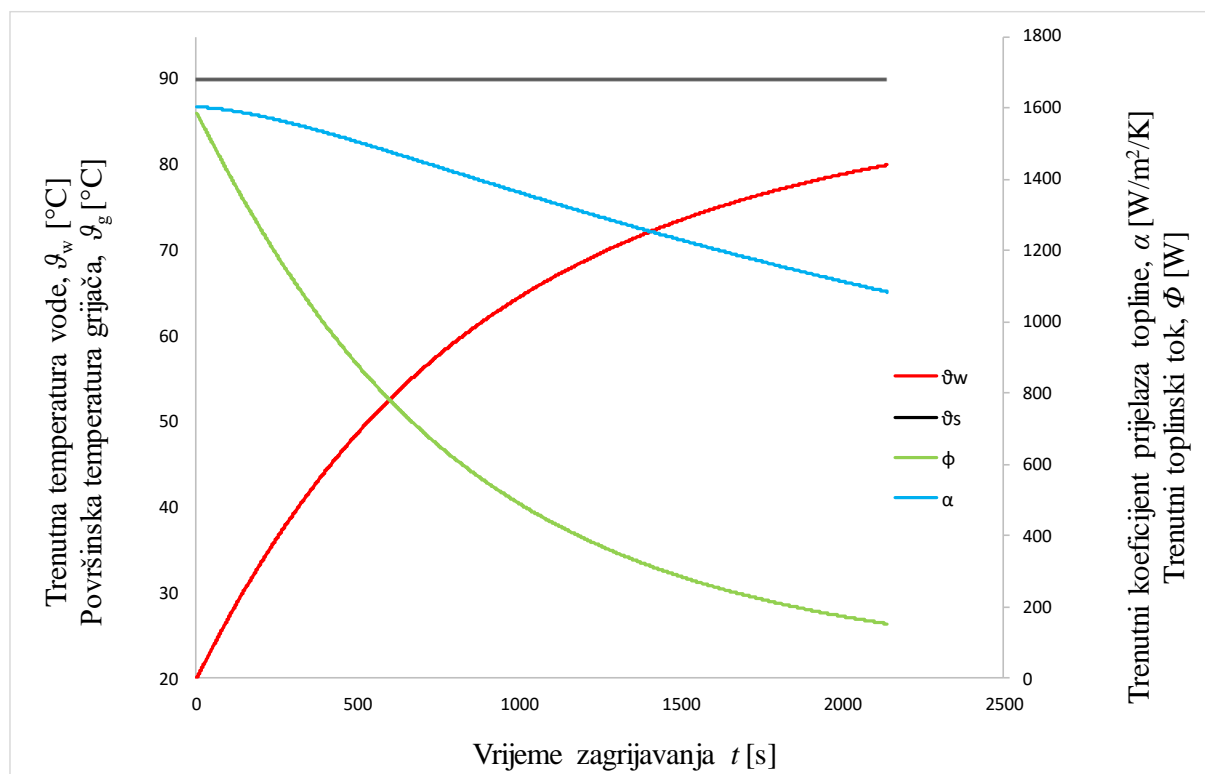
Zbog opsežnosti proračuna i jednostavnijeg prikaza, sljedeća tablica prikazuje rezultate dobivene proračunom prilikom povećanja temperature vode za  $10\text{ }^{\circ}\text{C}$  od početne  $\vartheta_{w,poc} = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$  do konačne temperature  $\vartheta_{w,kon} = 80\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Tablica 2. Rezultati proračuna (3.1.)

$g_w$	$\rho_w(\vartheta)$	$\beta_w(\vartheta)$	$\lambda_w(\vartheta)$	$\eta_w(\vartheta)$	$c_w(\vartheta)$	$Pr$	$Ra$	$Nu$	$\alpha$	$\Phi$	$\Delta g_w$
20	985,8107	0,0005	0,6490	0,0005	4179,3709	3,2168	14276273,9	37,0450	1602,9282	1586,2604	0,0759
30	983,3351	0,0005	0,6543	0,0005	4181,1449	2,9901	13711475,9	36,3775	1586,7132	1345,4695	0,0644
40	980,6757	0,0006	0,6590	0,0004	4183,6353	2,7986	12661888,7	35,3192	1551,6889	1096,0668	0,0524
50	977,8448	0,0006	0,6632	0,0004	4186,8266	2,6287	11163196,3	33,8270	1495,6500	845,66483	0,0404
60	974,8212	0,0006	0,6670	0,0004	4190,7419	2,4656	9220450,9	31,7690	1412,5920	598,9556	0,0286
70	971,6158	0,0006	0,6702	0,0004	4195,3687	2,2966	6814075,2	28,8527	1289,1795	364,46139	0,0174
80	968,2255	0,0007	0,6730	0,0003	4200,7111	2,1085	3832395,6	24,1630	1084,0918	153,25251	0,0073

## Grafički prikaz

Dijagram na slici 3. prikazuje vremensku promjenu trenutnog koeficijenta konvektivnog prijenosa topline kao i vremensku promjenu temperature vode i iznos trenutnog toplinskog toka.



**Slika 3. Vremenska promjena temperature vode, koeficijenta konvektivnog prijenosa topline te toplinskog toka kod horizontalnog grijača sa zadanom konstantnom površinskom temperaturom grijača**

## Podaci dobiveni proračunom

Na kraju proračuna može se očitati ukupno vrijeme zagrijavanja vode na zadanu konačnu temperaturu. Za ovaj slučaj ono iznosi  $t_{z, \theta_s}^h = 2139$  s. Tijekom zagrijavanja voda je mijenjala svoju temperaturu za određeni iznos unutar intervala  $\Delta\theta_w = 0,075 - 0,007$ . Naravno, što je temperatura vode bila bliže traženoj konačnoj, to je bila manja razlika između temperature površine grijača  $\theta_s$  i temperature vode  $\theta_w$  te je tako bilo manje i povećanje temperature vode.

Nadalje, vrijedno je prikazati prosječnu vrijednost toplinskog toka za ukupno vrijeme zagrijavanja vode. On iznosi  $\Phi_{pr, \theta_s}^h = 587,16$  W.

### Kontrola proračuna

Dobivenu vrijednost prosječnog toplinskog toka moguće je i neizravno kontrolirati preko jednadžbe

$$\begin{aligned}
 Q_{\text{gr}} &= \Phi_{\text{gr}} \cdot t_{z, \vartheta_s}^h = m_w \int_{t=0}^{t=t_{z, \vartheta_s}^h} c_w(\vartheta) d\vartheta = m_w \int_{\vartheta_{w, \text{poč}}}^{\vartheta_{w, \text{kon}}} (a + b\vartheta + c\vartheta^2) d\vartheta = \\
 &= m_w \left[ a(\vartheta_{w, \text{kon}} - \vartheta_{w, \text{poč}}) + \frac{b}{2}(\vartheta_{w, \text{kon}}^2 - \vartheta_{w, \text{poč}}^2) + \frac{c}{3}(\vartheta_{w, \text{kon}}^3 - \vartheta_{w, \text{poč}}^3) \right] = \\
 &= 5 \left[ 4207,071(80 - 20) - \frac{1,2898}{2}(80^2 - 20^2) + \frac{0,0142938}{3}(80^3 - 20^3) \right] = \\
 &= 1254781,092 \text{ J.}
 \end{aligned} \tag{21}$$

Ako je za ovaj slučaj vrijeme zagrijavanja  $t = t_{z, \vartheta_s}^h = 2139 \text{ s}$ , prosječni učinak grijača iznosi

$$\Phi_{\text{gr}} = \frac{Q_{\text{gr}}}{t} = \frac{1254781,092}{2139} = 587 \text{ W.}$$

Provedeni postupak može se kontrolirati i prema jednadžbi

$$Q_{\text{gr}} = A_{\text{gr}} \sum_{i=1}^{i=2139} \alpha(i)[\vartheta_s - \vartheta_w(i)] \cdot 1 = 1256530,580 \text{ J.} \tag{22}$$

Tako toplinski učin grijača iznosi

$$\Phi_{\text{gr}} = \frac{Q_{\text{gr}}}{t} = \frac{1256530,58}{2139} = 587 \text{ W.}$$

### 3.2. Vertikalni grijač s konstantnom površinskom temperaturom

Postupak proračuna kod vertikalnog grijača s konstantnom površinskom temperaturom identičan je prethodnome. Razlika je u vrijednostima pojedinih veličina upravo zbog drugačijeg položaja grijača koji zagrijava vodu. Tablica 3. prikazuje jedan dio rezultata ovoga proračuna. Fizikalna svojstva vode u početnom trenutku jednaka su onima u prethodnom slučaju zbog konstantne temperature grijača te jednake početne temperature vode. I ovdje je uzet vremenski inkrement u iznosu  $\Delta t = 1$  s.

**Tablica 3. Rezultati proračuna (3.2.)**

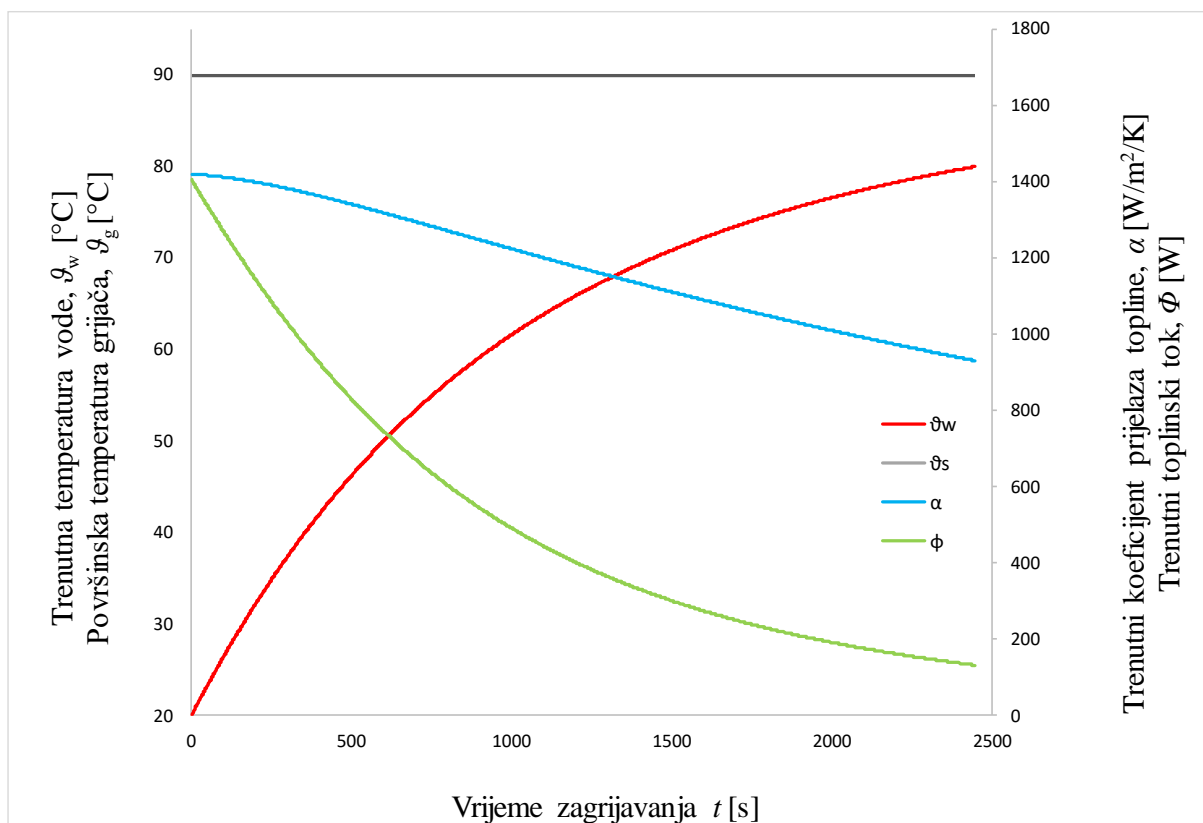
$\theta_w$	$Pr$	$Ra$	$Nu$	$\alpha$	$\Phi$	$\Delta\theta_w$
20	3,2168	114210191397,1	656,5360	1420,4084	1405,6386	0,0673
30	2,9894	109670839500,3	644,1949	1404,9588	1190,7072	0,0570
40	2,7984	101287221363,7	624,4659	1371,7506	968,8144	0,0463
50	2,6284	89281070975,6	596,4045	1318,5076	745,1743	0,0356
60	2,4654	73744876240,2	557,6909	1239,8778	525,5332	0,0251
70	2,2965	54492273454,6	502,8148	1123,3271	317,4223	0,0151
80	2,1084	30645854845,5	414,8502	930,6289	131,4927	0,0063

Uspoređujući gornje rezultate s rezultatima iz tablice 2. vidimo da se prva značajna promjena može uočiti u vrijednosti Rayleighove značajke. To je iz razloga što je kod horizontalnog grijača karakteristična dimenzija promjer  $d$ , a kod vertikalnog duljina  $L$  koji je 20 puta veći od promjera. To svakako daje veći iznos Rayleighove značajke kod vertikalnog grijača, a samim time mijenjaju se i Nusseltov broj te koeficijent konvektivnog prijenosa topline.



### Grafički prikaz

Vremensku promjenu trenutnog koeficijenta konvektivnog prijenosa topline kao i promjenu temperature vode i iznos trenutnog toplinskog toka prikazuje dijagram ispod.



**Slika 4.** Vremenska promjena temperature vode, koeficijenta konvektivnog prijenosa topline te toplinskog toka kod vertikalnog grijača sa zadanom konstantnom površinskom temperaturom grijača

### Podaci dobiveni proračunom

Iz proračuna možemo dobiti i vrijednost prosječnog toplinskog toka:  $\Phi_{pr, \theta_s}^v = 512,90$  W. Vrijeme zagrijavanja kod vertikalnog grijača dulje je u odnosu na zagrijavanje horizontalnim grijačem. U ovom slučaju to vrijeme iznosi  $t_{z, \theta_s}^v = 2450$  s. Vidi se da je u slučaju vertikalnog grijača vrijeme produljeno za 311 s (~5 min). To će za posljedicu imati i manju prosječnu snagu vertikalnog grijača (~74 W).

**Kontrola proračuna**

Budući da se i u ovom slučaju zagrijava jednaka masa vode od iste početne temperature do iste konačne temperature kao u slučaju s horizontalnim grijačem, toplina predana vodi bit će jednaka i prema jednadžbi (21) iznosi  $Q_{\text{gr}} = 1254781,092 \text{ J}$ .

Obrirrom na vrijeme zagrijavanja  $t = t_{z, \vartheta_s}^v = 2450 \text{ s}$ , prosječni učinak grijača iznosit će

$$\Phi_{\text{gr}} = \frac{Q_{\text{gr}}}{t} = \frac{1254781,092}{2450} = 512 \text{ W}$$

te se njegova vrijednost podudara s onom dobivenom proračunom.

Još jedna kontrola vrši se pomoću jednadžbe (22):

$$Q_{\text{gr}} = A_{\text{gr}} \sum_{i=1}^{i=2450} \alpha(i) [\vartheta_s - \vartheta_w(i)] \cdot 1 = 1256613,624 \text{ J}$$

i na kraju se izračuna toplinski učin grijača

$$\Phi_{\text{gr}} = \frac{Q_{\text{gr}}}{t} = \frac{1256613,624}{2450} = 512 \text{ W}.$$

### 3.3. Horizontalni grijač s konstantnim toplinskim učinkom

Kod proračuna s grijačem konstantnog toplinskog učina nailazi se u početku na problem nepoznavanja početne temperature stijenke grijača. Naime, kako je nametnut uvjet konstantnog toplinskog toka, temperatura stijenke mijenja se zajedno s temperaturom vode. To svakako otežava proračun jer u početku nije moguće izračunati fizikalna svojstva vode koja ovise upravo o temperaturi grijača i temperaturi vode te se tako ne može izračunati ni trenutni koeficijent prijenosa topline.

Kako je u proračun potrebno ući s pretpostavkom temperature grijača, nakon iteriranja ta temperatura je određena i iznosi  $\vartheta_s = 58,4886$  °C. Iteracija je provedena na način da se pretpostavi neka temperatura grijača nakon čega se može odrediti srednja temperatura  $\vartheta_m = (\vartheta_w + \vartheta_s)/2$ . S tom temperaturom moguće je izračunati i fizikalna svojstva vode kao i bezdimenzijske značajke  $Pr$ ,  $Gr$ ,  $Ra$ ,  $Nu$  pomoću kojih se može odrediti trenutni koeficijent prijenosa topline. S tim koeficijentom, uz vremenski inkrement  $\Delta t = 1$  s, kontrolira se ulazna pretpostavka pomoću jednadžbe (2):

$$\begin{aligned}\Phi_{gr} &= \alpha_w d\pi L (\vartheta_s - \vartheta_w) \\ \Rightarrow \vartheta_s &= \vartheta_w + \frac{\Phi_{gr}}{\alpha_w d\pi L}.\end{aligned}\quad (23)$$

Kada se jednadžbom (23) dobije jednaka vrijednost temperature grijača kao i pretpostavljena, proračun je moguće izvesti do kraja.

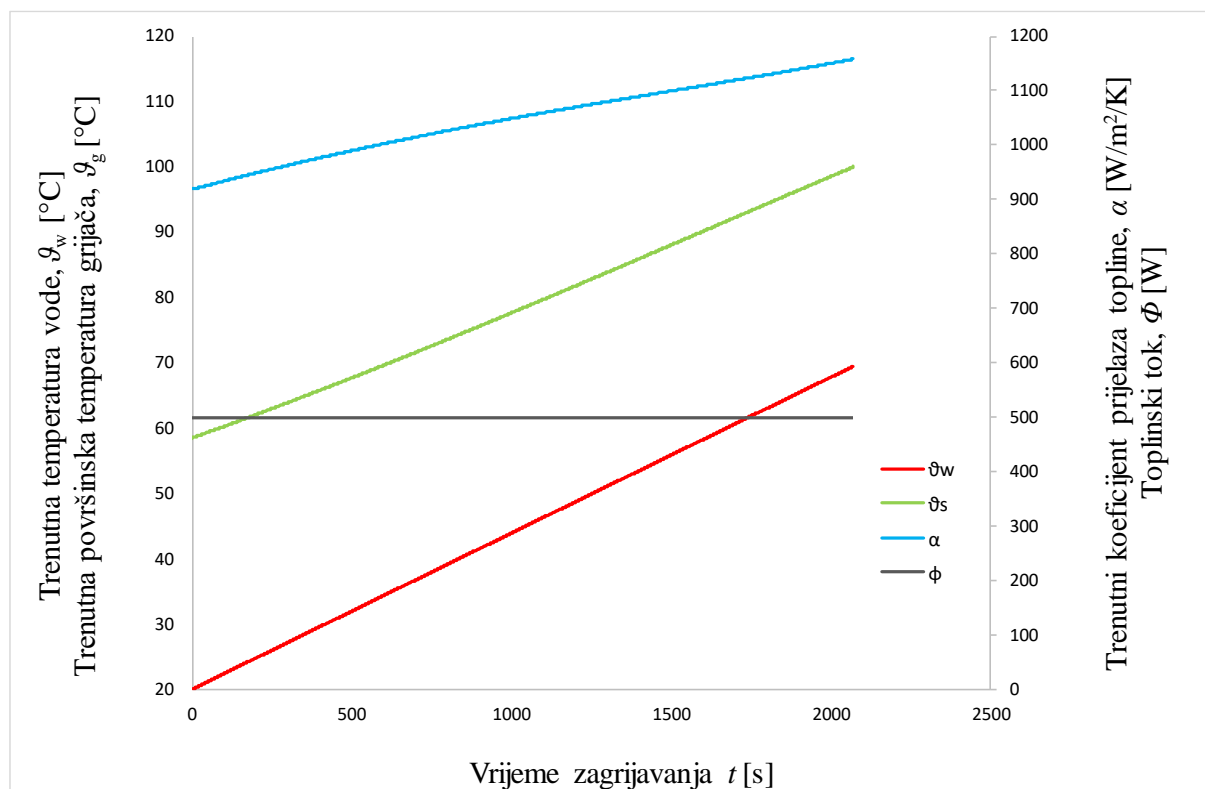
Proračun je proveden na isti način kao i za grijače s konstantnom površinskom temperaturom, samo što se sada traži temperatura grijača u pojedinom trenutku, a ne toplinski tok. Tablica 4. prikazuje jedan dio rezultata proračuna za pojedine temperature vode.

**Tablica 4. Rezultati proračuna (3.3.)**

$\vartheta_w$	$Pr$	$Ra$	$Nu$	$\alpha$	$\vartheta_s$	$\Delta\vartheta_w$
20	4,3280	4872502,4	21,8993	918,9156	58,4886	0,0239
30	3,6166	6123562,3	22,9116	979,0799	66,1280	0,0239
40	3,1141	7357959,7	23,7361	1030,7061	74,3214	0,0239
50	2,7486	8565882,9	24,4282	1075,2535	82,8949	0,0239
60	2,4383	9892990,2	25,0898	1239,8778	91,6832	0,0251

## Grafički prikaz

Sljedeći dijagram pokazuje upravo ovisnost temperature grijača kao i koeficijenta prijenosa topline o vremenu. Prikazano je kako se i temperatura vode mijenja s vremenom.



**Slika 5. Vremenska promjena temperature vode, koeficijenta konvektivnog prijenosa topline te temperature stijenke kod horizontalnog grijača sa zadanim konstantnim toplinskim tokom**

Iz dijagrama je vidljivo da temperatura vode linearno raste s vremenom. Vrijednost površinske temperature grijača također raste, ali ne linearno. Tako se trenutna razlika između površinske temperature grijača i vode smanjuje s porastom vremena, a što za posljedicu ima kontinuirani porast koeficijenta prijenosa topline  $\alpha_w$  kako to već prikazuje plava linija na gornjoj slici.

## Podaci dobiveni proračunom

Kako je u modelu limitiran proces postignutom površinskom temperaturo grijača od 100 °C zbog pojave procesa isparavanja vode, tada se iz gornjeg dijagrama vidi da se pojava površinske temperature od 100 °C događa nakon  $t = t_{z, \phi_{gr}}^h = 2071$  s ( $\sim 35$  min), pri čemu je

voda postigla temperaturu  $\vartheta_{w,kon} = 69,4697\text{ }^{\circ}\text{C}$ . To znači da se nametnutom snagom grijača ne može zadanu masu vode (5 kg) zagrijati na traženih  $80\text{ }^{\circ}\text{C}$ , a da ne nastupi proces isparivanja. Dakle, za zadanu masu trebalo bi smanjiti snagu grijača.

### Kontrola proračuna

Zadanu snagu grijača kontroliramo preko jednadžbe (21) iz koje se dobije toplina predana vodi za ukupno vrijeme zagrijavanja i iznosi  $Q_{gr} = 1034137,336\text{ J}$ . Kako je poznato vrijeme zagrijavanja  $t_{z, \phi_{gr}}^h = 2071\text{ s}$ , prosječni učinak grijača iznost će

$$\phi_{gr} = \frac{Q_{gr}}{t} = \frac{1034137,336}{2071} = 499,34\text{ W}.$$

Istu snagu grijalice kontrolira se još i preko jednadžbe (22):

$$Q_{gr} = A_{gr} \sum_{i=1}^{i=2071} \alpha(i)[\vartheta_s(i) - \vartheta_w(i)] \cdot 1 = 1035500\text{ J}.$$

$$\phi_{gr} = \frac{Q_{gr}}{t} = \frac{1035500}{2071} = 500\text{ W}.$$

Vidi se da se u oba slučaja dobiva praktički instaliranu snagu grijača od 500 W, što upućuje na činjenicu da je proračun proveden korektno.

### 3.4. Vertikalni grijač s konstantnim toplinskim učinkom

Kao i kod horizontalnog grijača s konstantnim toplinskim učinkom i ovdje se odmah u početku nameće problem jer je nepoznata početna temperatura stijenke grijača. Svakako da o njoj ovise fizikalna svojstva vode koja nije moguće izračunati prije nego se odredi početna temperatura stijenke grijača.

Iteriranjem se dobila tražena temperatura i ona iznosi  $\vartheta_s = 56,7411$  °C. Iteracija je provedena na isti način kao i kod horizontalnog grijača.

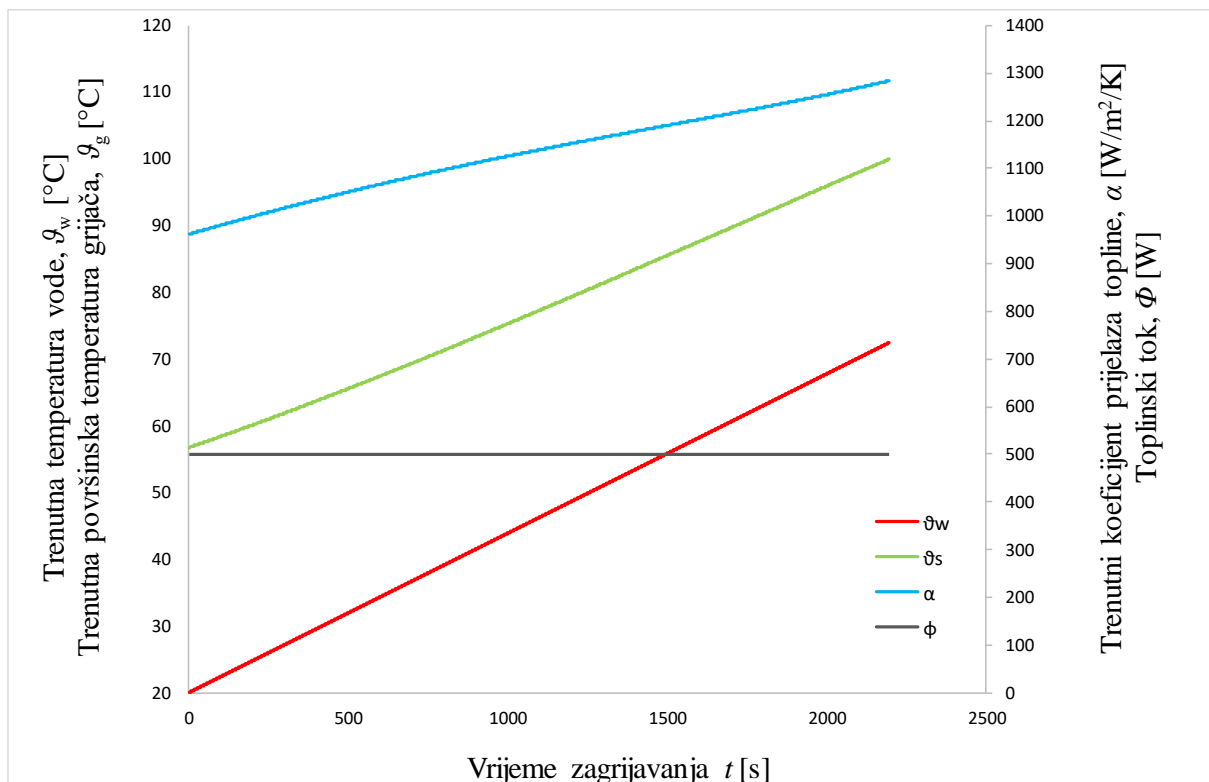
**Tablica 5. Rezultati proračuna (3.4.)**

$\vartheta_w$	$Pr$	$Ra$	$Nu$	$\alpha$	$\vartheta_s$	$\Delta\vartheta_w$
20	4,4141	35991991685	459,7155	962,6208	56,7411	0,0239
30	3,6859	44841700135	486,6540	1037,7590	64,0853	0,0239
40	3,1666	53579755577	508,9941	1103,0915	72,0701	0,0239
50	2,7906	62053213410	527,8300	1159,8181	80,4983	0,0239
60	2,4792	71104384901	545,5985	1212,4524	89,1820	0,0239
70	2,1512	83134744088	566,0485	1268,7666	97,8760	0,0238

U tablici 5. prikazan je jedan dio rezultata proračuna za pojedine temperature vode. Svakako da se sada prati temperatura grijača u pojedinom trenutku, a ne toplinski tok jer je on nepromjenjiv. Ako usporedimo gornje rezultate s rezultatima iz tablice 4., vidljivo je da se vrijednosti Rayleighove značajke znatno razlikuju. Već je spomenuto da je razlog tomu geometrija grijača. Kod horizontalnog grijača karakteristična dimenzija je promjer  $d$ , a kod vertikalnog duljina  $L$  koja je 20 puta veća od promjera. Zbog drukčijeg iznosa Rayleighove značajke kod vertikalnog grijača, mijenjaju se i ostale veličine ( $Nu$ ,  $\alpha$ ,  $\vartheta_s$  ...).

#### Grafički prikaz

Ovisnost temperature grijača i ovisnost koeficijenta prijenosa topline o vremenu te vremensku promjenu temperature vode prikazuje dijagram na slici 6.



**Slika 6. Vremenska promjena temperature vode, koeficijenta konvektivnog prijenosa topline te temperature stijenke kod vertikalnog grijača sa zadanim konstantnim toplinskim tokom**

Kao i kod horizontalnog grijača temperatura vode linearno raste s vremenom, dok vrijednost površinske temperature grijača ima nelinearan rast. Plava linija prikazuje kontinuirani porast koeficijenta prijenosa topline  $\alpha_w$ .

### Podaci dobiveni proračunom

Pojava površinske temperature grijača od 100  $^{\circ}\text{C}$  događa se nakon  $t = t_{z, \phi_{gr}}^v = 2196$  s ( $\sim 37$  min), pri čemu je voda postigla temperaturu  $\vartheta_{w, \text{kon}} = 72,4522$   $^{\circ}\text{C}$ . Može se zaključiti da se nametnutom snagom grijača ne može zadanu masu vode (5 kg) zagrijati na traženih 80  $^{\circ}\text{C}$ , a da ne nastupi proces isparivanja. Trebalo bi za zadanu masu trebalo smanjiti snagu grijača.

**Kontrola proračuna**

Iz jednadžbe (21) može se dobiti iznos topline predan vodi za ukupno vrijeme zagrijavanja i ona iznosi  $Q_{gr} = 1096583,907 \text{ J}$ . Poznato je vrijeme zagrijavanja  $t_{z, \Phi_{gr}}^v = 2196 \text{ s}$  pa prosječni učinak grijača iznosi

$$\Phi_{gr} = \frac{Q_{gr}}{t} = \frac{1096583,907}{2196} = 499,36 \text{ W.}$$

Dodatna kontrola provodi se preko jednadžbe (22):

$$Q_{gr} = A_{gr} \sum_{i=1}^{i=2196} \alpha(i)[\vartheta_s(i) - \vartheta_w(i)] \cdot 1 = 1098000 \text{ J.}$$

$$\Phi_{gr} = \frac{Q_{gr}}{t} = \frac{1098000}{2196} = 500 \text{ W.}$$

Vidimo da je proračun ispravno proveden.



## 4. NUMERIČKA ANALIZA

Numeričkim pristupom je rješavan sustav parcijalnih diferencijalnih jednaždbi koji opisuje prirodnu konvekciju u vodi. Za numeričku analizu odabran je horizontalni grijač s konstantnom površinskom temperaturom, a korišten je komercijalni softver *FLUENT*.

Sami problem definiran je sustavom od 4 parcijalne diferencijalne jednažbe (jednažba kontinuiteta, jednažba količine gibanja (u x i y smjeru) te energijska jednažba za vodu) koje su prikazane ispod:

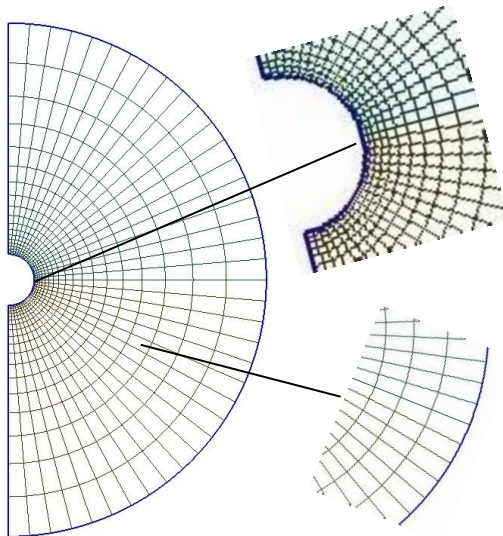
$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = \nabla \cdot [\mu(\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T)] - \nabla p + \rho \vec{g} \quad (24)$$

$$\frac{\partial(\rho c \vartheta)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho c \vec{v} \vartheta) = \nabla \cdot (\lambda \nabla \vartheta) \quad (25)$$

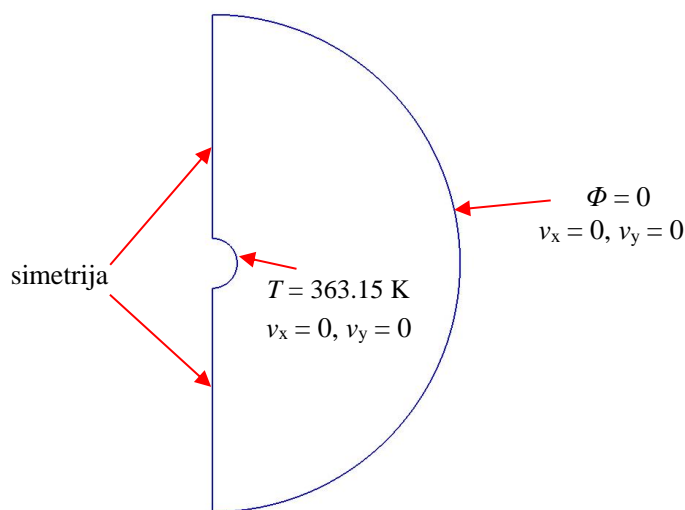
gdje je  $t$  - vrijeme,  $\vec{v}$  - vektor brzine,  $\rho$  - gustoća vode,  $\mu$  - viskoznost vode,  $c$  - specifični toplinski kapacitet vode,  $\lambda$  - toplinska provodnost vode,  $\vartheta$  - temperatura u Celzijevim stupnjevima,  $p$  - tlak,  $\vec{g}$  - vektor ubrzanja zemljine sile teže ( $9.80665 \text{ m/s}^2$ ),  $\nabla$  - diferencijalni operator i  $(\nabla \vec{v})^T$  - transponirani vektor gradijenta brzine.

Geometrija je načinjena pomoću softvera *Gmsh*. Zbog velikih gradijenata temperature i brzine, mreža konačnih volumena usitnjena je uz površinu grijača kako to prikazuje slika 7.



Slika 7. Mreža konačnih volumena

Vanjska granica područja zadana je kao nepropusna stijenka s adijabatskim rubnim uvjetom, a unutarnja stijeka kao nepropusna stijenka s konstantnom temperaturom od 90 °C.



Slika 8. Rubni uvjeti

S ovako definiranom geometrijom ulazi se u *FLUENT* te se postavljaju spomenuti i odgovarajući dodatni uvjeti za rješavanje problema. Zbog radne memorije računala, mreža je grublja te ukupni broj volumena iznosi 862. Vremenski korak postavljen je na 0,05 s, a za proračun je korišten *SIMPLE* algoritam. Zbog moguće divergencije rješenja, zadaju se i podrelaksacijski faktori. Što su vrijednosti tih faktora niže, to je vrijeme računanja simulacije duže, ali je simulacija stabilnija. Vrijednosti korištene u ovome proračunu prikazuje slika 9.

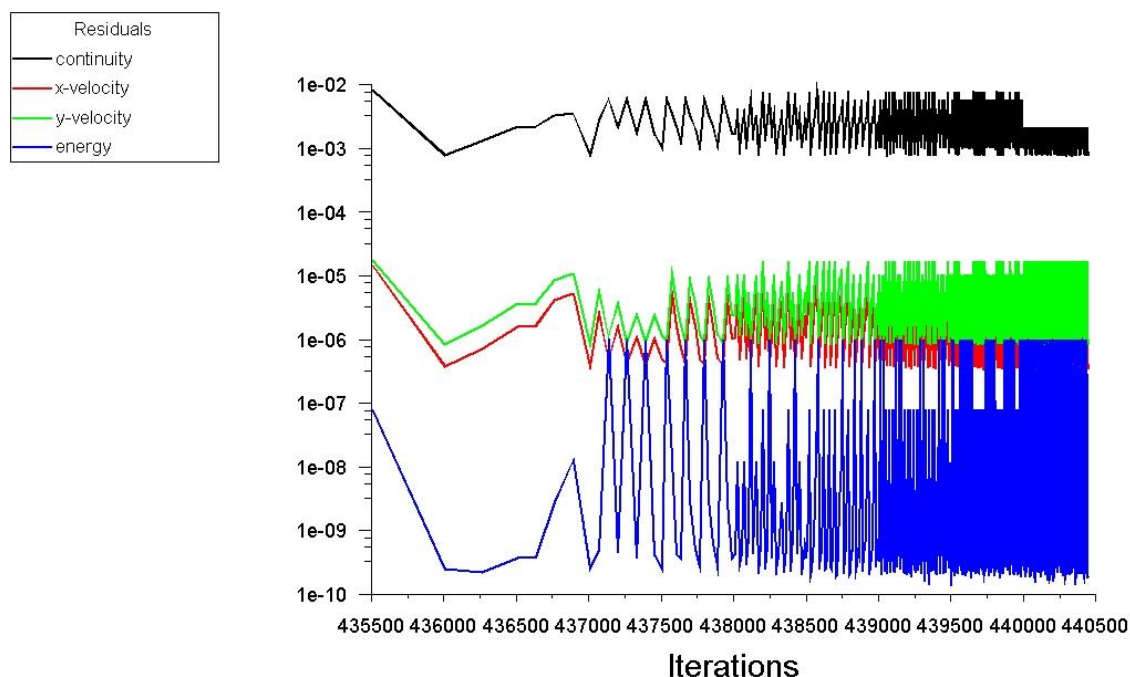
**Solution Controls**

Under-Relaxation Factors

Pressure	0.3
Density	1
Body Forces	0.5
Momentum	0.3
Energy	0.91

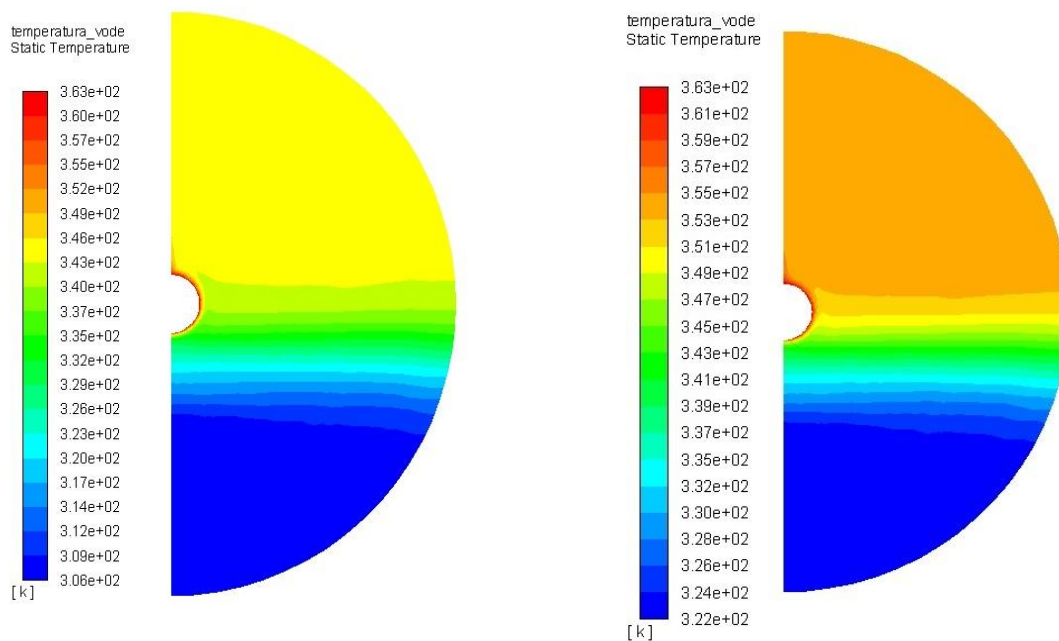
Slika 9. Podrelaksacijski faktori

Budući da se konvergencija rješenja prati preko dijagrama vrijednosti reziduala, važno je da te vrijednosti budu unutar odgovarajućih intervala ( $10^{-2}$  –  $10^{-6}$  ili manje). Dijagram iz ove analize prikazan je na slici ispod.



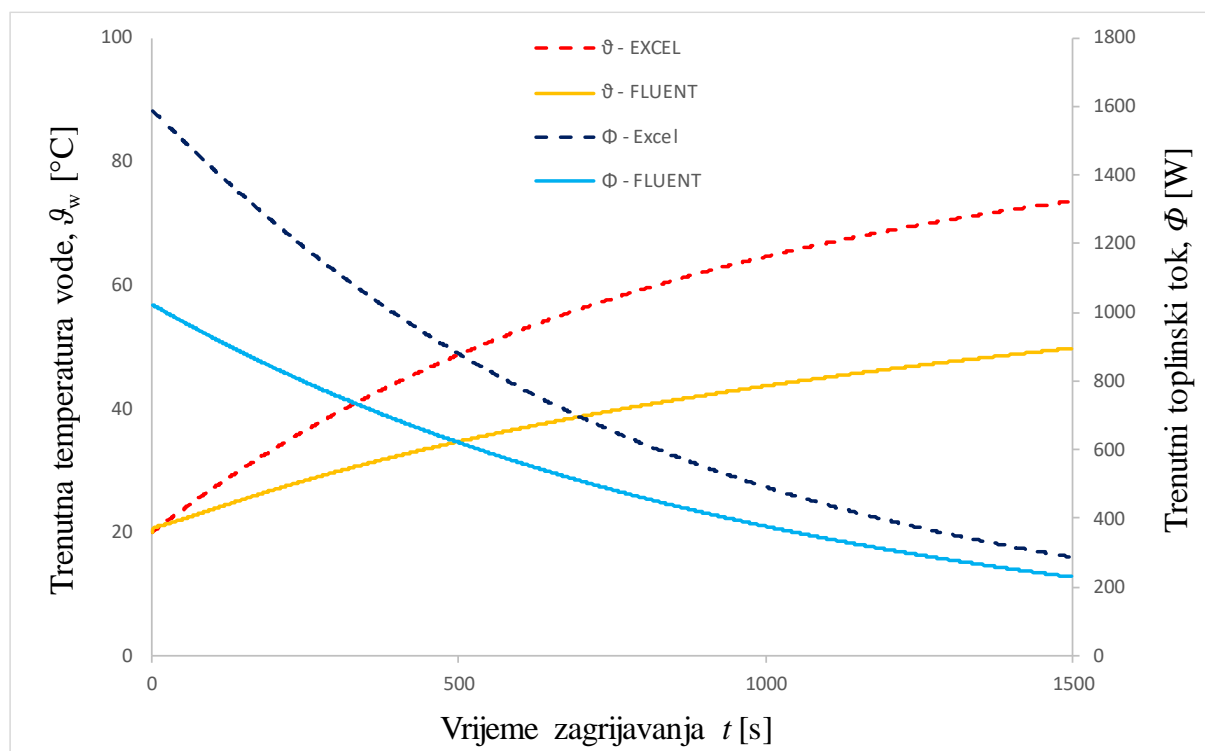
**Slika 10. Dijagram vrijednosti reziduala**

Također, nametnut je i uvjet da se voda nalazi u gravitacijskom polju gdje gravitacija iznosi  $9,80665 \text{ m/s}^2$ . Zbog razlike u gustoći između toplije i hladnije vode, toplija voda ide prema vrhu, dok hladnija pada prema dnu. Temperaturno polje zajedno s geometrijom u određenom trenutku zagrijavanja prikazuje slika 10. Simulacija je zaustavljena u onom trenutku kada je prosječna temperatura vode iznosila  $80 \text{ }^{\circ}\text{C}$  ( $353,15 \text{ K}$ ). Tako je ta konačna temperatura vode postignuta nakon 6805 s. uz vremenski korak od 0,05 s. To vrijeme se svakako može skratiti izradom kvalitetnije mreže s više kontrolnih volumena te s manjim vremenskim korak. To, naravno, zahtjeva veći rad procesora kao i veću radnu memoriju.



**Slika 11. Slikoviti prikaz zagrijavanja vode**

Rezultati proračuna prikazani su na slici 12.



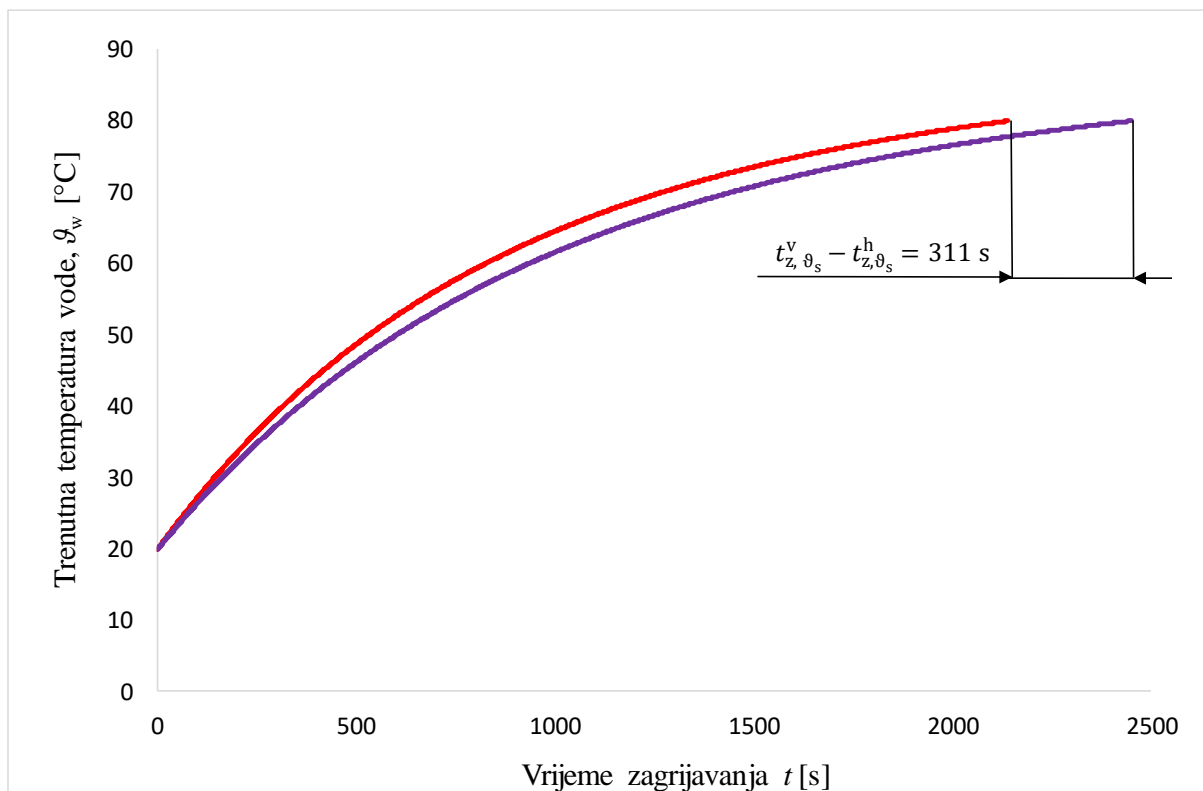
**Slika 12. Usporedba numerički dobivenih rezultata s analitičkim**

Sa slike je vidljiv kontinuiran porast temperature vode, a vidljivo je smanjenje vrijednosti toplinskog toka tijekom vremena. Vidimo kako postoje odstupanja u rezultatima između numerički i analitički dobivenih vrijednosti. Odstupanja su opravdana jer se u analitičkom dijelu proračuna uzeo vremenski inkrement u iznosu od 1 s, dok je numeričkim pristupom nestacionarnost ovoga procesa puno značajnije uzeta u obzir tijekom proračuna.

Kako je opravdano koristiti se analitičkim pristupom s kvazistacionarnim modelom zagrijavanja vode, bitno se može utjecati na vrijeme trajanja proračuna u odnosu na numeričko dobivanje rješenja jer se analitičkim pristupom znatno skraćuje vrijeme rada procesora.

## 5. ANALIZA, PRIMJENA I USPOREDBA GRIJAČA

Već je rečeno kako je vrijeme zagrijavanje vode pomoću vertikalno uronjenog grijača s konstantnom temperatorm grijača produženo za 311 s. To se jasno vidi i na slici 7. koja prikazuje kako se temperatura vode mijenja s vremenom zagrijavanja.



**Slika 13. Vremenska ovisnost temperature vode za grijače s konstantnom površinskom temperaturom**

Za gornje krivulje moguće je dobiti i jednadžbe koje opisuju njihovo ponašanje, odnosno jednažbe koje prikazuju ovisnost temperature o vremenu zagrijavanja. Tako bi primjenom horizontalnog grijača to bila jednadžba:

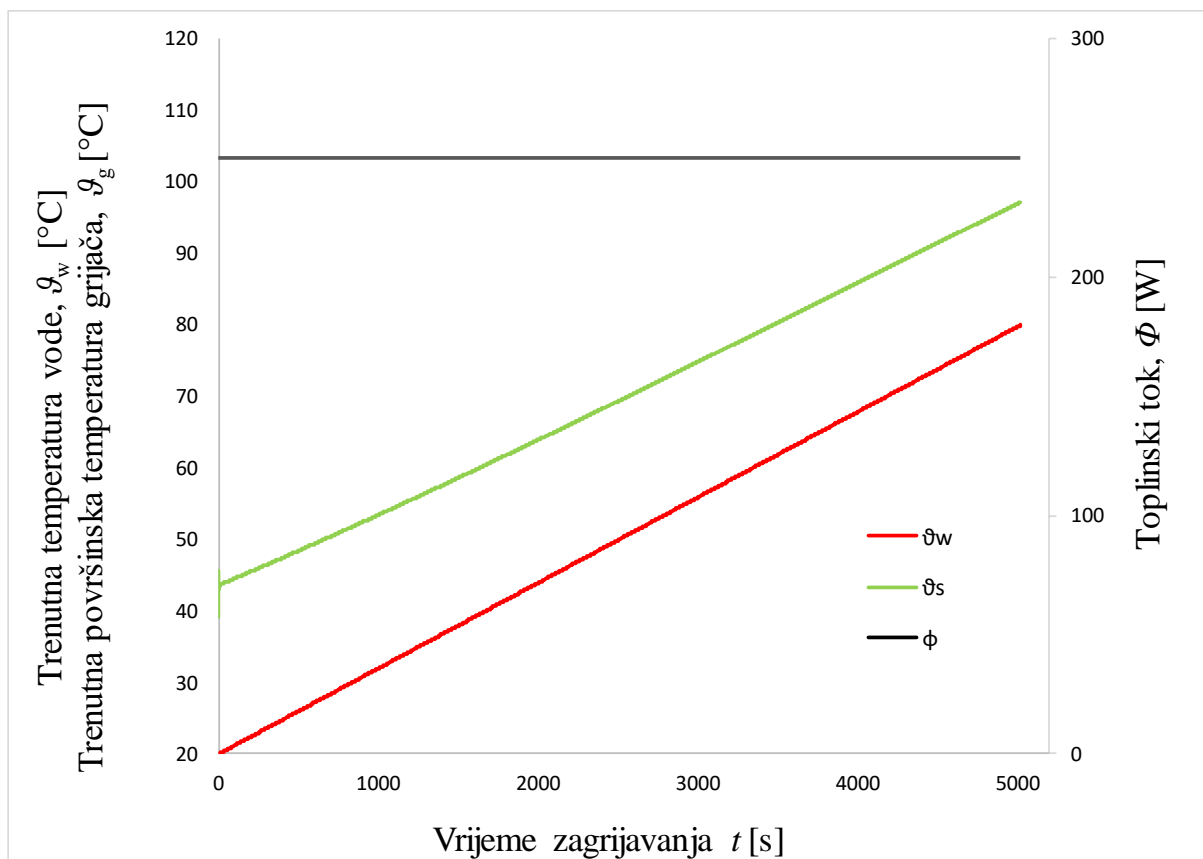
$$\vartheta_w = 5,7 \cdot 10^{-9} t^3 - 3,20102 \cdot 10^{-5} t^2 + 0,0705305651 t + 20,575435751. \quad (24)$$

Također, primjenom vertikalnog grijača imamo polinom trećeg stupnja:

$$\vartheta_w = 3,9 \cdot 10^{-9} t^3 - 2,49991 \cdot 10^{-5} t^2 + 0,0622689677 t + 20,611988818. \quad (25)$$

Budući da grijači s nametnutim toplinskom tokom od 500 W nisu zadovoljili potrebu za traženo zagrijavanje vode, uputno je smanjiti snagu tih grijača. To svakako ima za posljedicu produženje vremena zagrijavanja vode.

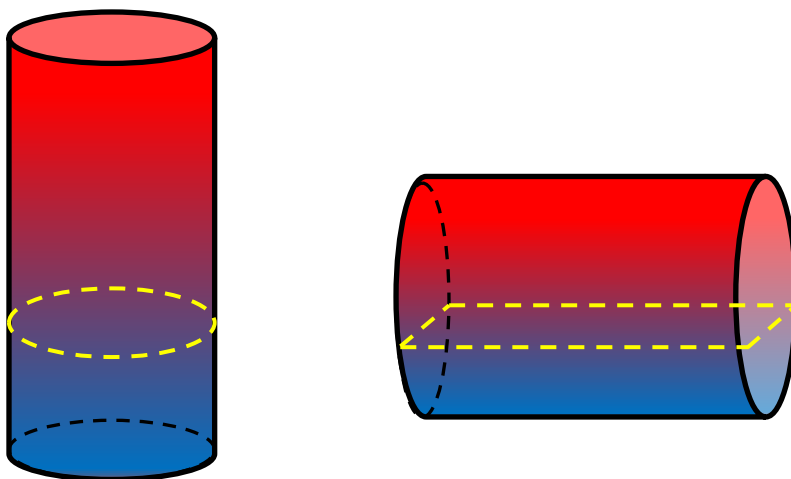
Jedan primjer prikazuje slika 14. na kojoj je opisan proces zagrijavanja vode primjenom grijača s nametnutim učinkom od 250 W. U tom slučaju vrijeme zagrijavanja vode iznosi 5023 s (~84 min).



**Slika 14. Promjena temperature vode primjenom grijača snage 250 W**

Ovakvi grijači imaju široku primjenu. Njihovo djelovanje u literaturi se promatra preko izmjene topline s horizontalnog, odnosno vertikalnog cilindra. Svakako da je važno prepoznati na koji se način ta topline prenosi na druga tijela. Tako prijenos topline prirodnom konvekcijom s horizontalnih i vertikalnih cilindara ima primjenu od grijača vode, izmjenjivača topline, do solarnog grijanja i hlađenja elektroničkih paketa. Jedan od bliskih primjera je primjena horizontalnih i vertikalnih bojlera. Jasno je koliko je široka njihova upotreba. Tradicionalni bojleri su uglavnom namijenjeni za vertikalno

montiranje, dok su horizontalni tek novi na tržištu. Jedna od glavnih prednosti horizontalnih bojlera je ušteda prostora, a za vertikalne se vjeruje da imaju veću učinkovitost. Slika 9. prikazuje fizikalno objašnjenje za veću učinkovitost vertikalnih u odnosu na horizontalne bojlere.



**Slika 15. Vertikalni i horizontalni bojler**

Topla voda ima manju gustoću te tako ima tendenciju odlaska prema vrhu spremnika, dok hladna voda ostaje na dnu. Površina omeđena kružnicom na slici lijevo manja je od one pravokutne na slici desno te su time manje i turbulencije prilikom miješanja tople i hladne vode kao i prilikom prolaska vode kroz vertikalni spremnik. Na osnovu toga smatra se vertikalne bojlere energetske učinkovitijim. Osim toga, horizontalni bojleri su skuplji, a svakako da cijena igra bitnu ulogu prilikom odabira odgovarajućeg spremnik. [4]



## 6. ZAKLJUČAK

U radu se htjelo prikazati vremensku promjenu temperature, trenutnog koeficijenta konvektivnog prijenosa topline te toplinskog toka. Odabran je analitički pristup gdje se vidjelo da su grijači s konstantnim temperaturama uspjeli provesti proces zagrijavanja, dok grijači s nametnutim toplinskom tokom nisu. To je svakako zbog iznosa nametnutog toplinskog toka kojeg bi trebalo smanjiti za ovaj proces.

Prema provedenim analizama pokazalo se da analitični pristup s kvazistacionarnim modelom prijelaza topline daje dobra rješenja za ovaj nestacionarni proces zagrijavanja vode. Zbog jednostavnosti, u analitičkoj razradi uzet je vremenski inkrement od 1 s. Za numeriču analizu vremenski korak je iznosio 0,05 s. Smanjenjem ovim vremenskih koraka dobila bi se još točnija rješenja. No, cilj je bio vidjeti kako se kreće profil temperature vode i ostalih veličina tijekom zagrijavanja. Odstupanja u usporedbi s rješenjima dobivenih numeričkim putem su, naravno, vidljiva.

## LITERATURA

- [1] Holik, M., Krizmanić, S., Ferdelji, N., Živić, M., Galović, A.: Zagrijavanje vode prirodnom konvekcijom pomoću horizontalno uronjenog grijača, Zbornik radova petog susreta Hrvatskog društva za mehaniku, Zagreb, 2013.
- [2] Galović, A.: Termodinamika II, Zagreb, 2014.
- [3] Boras, I., Švaić, S.: Formule za izračunavanje koeficijenata prijelaza topline, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb
- [4] <http://www.zelect.in/geyser/vertical-vs-horizontal-geyser>
- [5] Halasz, B.: Predlošci za vježbe iz termodinamike II, Fakultet strojarstva i brodogradnje Zagreb, 2015.

## **PRILOZI**

### **I. CD-R disc**